Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^{n^2}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3\sqrt{n}}}-1\right)$

(a) La prima serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{n^2}}$ è a termini positivi.

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\frac{(n+1)!}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{n^2}}{n!} = \frac{(n+1)\cancel{n!}}{3^{\cancel{n^2}+2n+1}} \cdot \frac{\cancel{3^{n^2}}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{3^{2n+1}} \longrightarrow 0 \; (<1)$$

pertanto è CONVERGENTE.

(b) La seconda serie è a segno alterno.
Risulta:
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = 0$

ii) Poiché $\sqrt[3]{(n+1)^2} > \sqrt[3]{n^2} \iff \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$

e poiché $\operatorname{arctg} x$ è crescente $\Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}\right) < \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

quindi è $\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right\}$ è una successione decrescente

Pertanto, verificate le ipotesi del criterio di Leibniz, la serie è convergente.

(c) La terza serie è a termini positivi.

Risulta:

$$n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3\sqrt{n}}}-1\right) = n\sqrt{n}\;\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^3\sqrt{n}}}-1}{\frac{1}{n^3\sqrt{n}}}\cdot\frac{1}{n^3\sqrt{n}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\frac{\cancel{n\sqrt{n}}}{n^{\overset{2}{\cancel{3}}}\cancel{\sqrt{n}}} = \left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\frac{1}{n^2}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie ha lo stesso carattere della serie $\sum \frac{1}{n^2}$, quindi essa è CONVERGENTE.